Wir betrachten unbestimmte Integrale der Form $F_n(x) = \int \frac{1}{x+x^n} dx$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Man könnte zunächst auf die Idee kommen, den Nenner zu faktorisieren, $x + x^n = x(1 + x^{n-1})$, und dann eine Partialbruchzerlegung zu versuchen. Damit eine PBZ funktioniert, sollte man im Nenner aber idealerweise nur lineare Faktoren haben oder höchstens quadratische. Falls $n > 3$ ist, ist aber $1 + x^{n-1}$ ein Faktor von mindestens dem 3. Grad… Man könnte versuchen, diesen Faktor $1 + x^{n-1}$ noch weiter zu faktorisieren, das wird aber in den allermeisten Fällen nur sehr schwierig möglich sein.

Hier hilft ein ziemlich genialer Trick: Wir klammern nicht x aus, sondern x^n! Dann wird das Integral zu

$$F_n(x) = \int \frac{1}{x^n(x^{-n+1} + 1)} dx = \int \frac{x^{-n}}{x^{-n+1} + 1} dx$$

Nun steht aber im Zähler fast die Ableitung des Nenners, denn es ist ja $(x^{-n+1} + 1)' = (-n + 1)x^{-n}$! Also können wir schreiben:

$$F_n(x) = \frac{1}{-n+1} \int \frac{(-n+1)x^{-n}}{x^{-n+1} + 1} dx = \frac{1}{1-n} \int \frac{(x^{-n+1} + 1)'}{x^{-n+1} + 1} dx = \frac{1}{1-n} \ln|x^{-n+1} + 1| + C$$

Fertig!

Man könnte das Ergebnis noch umschreiben zu

$$\frac{\ln|x + x^n| - n \ln|x|}{1-n} + C,$$

das sieht aber auch nicht direkt hübscher aus…

Man verallgemeinert das Ergebnis aber leicht zu

$$\int \frac{1}{ax + bx^n} dx = \frac{1}{a(1-n)} \ln|ax^{-n+1} + b| + C = \frac{\ln|ax + bx^n| - n \ln|x|}{a(1-n)} + C.$$

Auf den Trick bin ich natürlich nicht selbst gekommen, den habe ich von hier:

https://www.youtube.com/watch?v=oACmoJRPu2E